42Danka(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 412

„Hogyan lehetségesek szintetikus *a priori* ítéletek?”[1]

Matematika és filozófia kapcsolata Kantnál és a kései Wittgensteinnál

Danka István

Az alábbi tanulmány matematika és filozófia szoros kapcsolatát példázza két, a matematika iránt élénk érdeklődést tanúsító filozófus, Immanuel Kant és Ludwig Wittgenstein munkásságának vonatkozásában. Egyrészt arra kíván rámutatni, hogy bizonyos tudományos kérdések, jelesül a matematika eredményei milyen hatással voltak egyes filozófiai nézetekre, másrészt azt vizsgálja, hogy a matematikai kutatások mennyiben kamatoztathatják azt az érdeklődést, amit a filozófusok mutatnak irántuk. Matematika és filozófia ilyesfajta kapcsolata egyben azt is példázza majd, hogyan sikerült a filozófiának a két gondolkodó ténykedése között eltelt szűk-bő másfél évszázad alatt valamelyest gyakorla-

1 Az alábbiakban két fő hivatkozási alapom Kanttól *A tiszta ész kritikája* és Wittgenstein *Nachlaß*ja. Előbbire a konvenciónak megfelelően hivatkozom, A-val az első, B-vel a második eredeti kiadás oldalszámaira utalva a Felix Meiner Kiadó 1944-es, Lipcsében nyomott kötete alapján. Az M betű utáni szám pedig az 1995-ös, Ictus-féle magyar kiadás oldalszámait jelzi; jóllehet Kis János fordítását nem mindenütt veszem át.

Wittgenstein-hivatkozásaim a hagyaték nemrégiben kiadott CD-gyűjteményére referálnak: *Wittgenstein's Nachlass. The Bergen Electronic Edition.* Oxford–Bergen: Oxford University Press, 2000. A jelöléseim – a fenti gyűjtemény alapján – a von Wright-féle számozást követik; az első szám az irat számkódját, a második az azon belüli oldalszámot adja meg.

Munkám egyes szakaszai az EU–ARI–WAB-program keretében a Bergeni Egyetem Wittgenstein Archívuma által rendelkezésemre bocsátott dokumentumok feldolgozása nélkül nem készülhettek volna el; ezért köszönettel tartozom. Köszönöm továbbá Benedek András és Tanács János hasznos megjegyzéseit.

42Danka(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 413

tiasabb képet kialakítani a matematikáról, és így magának a filozófiának is némiképp a gyakorlathoz közelebb kerülnie. Munkám ezen általánosabb, e kötet többi írásával összekapcsoló célkitűzése mellett – mintegy mellékes hozadékként – a szintetikus *a priori* kanti–wittgensteini fogalmának egy pragmatikus, normatív cselekvéselméleti fogalmát körvonalazza.

A matematika olyasfajta tudományként él a köztudatban, amely a legmegbízhatóbb igazságokat tárja fel. A legtöbb tapasztalati kérdésben van némi bizonytalanság; a tudomány fejlődése azt mutatja, hogy számos, korábban igaznak vélt tan idővel pontatlannak, netán egyenesen tévedésnek bizonyult. Például az egyik legkézenfekvőbbnek tartott igazságunk az volt ezredéveken át, hogy reggel felkel a Nap, este pedig lenyugszik, és aki ebben kételkedett volna, azt jobb esetben bolondnak nézték, rosszabb esetben megégették. A tudomány fejlődése aztán rácáfolt ezen közhelyszámba menő vélekedésre; s bizony nem ez az egyetlen eset, ahol idővel el kellett fogadnunk, hogy a saját szemünknek sem mindig hihetünk. Jó okunk van így fenntartani, hogy az úgynevezett empirikus tudományok – azok tehát, amelyek ismeretanyaga legalábbis részben megfigyeléseken és kísérleteken alapszik – tévedhetnek; *elvileg nem kizárt,* hogy bármikor előáll valaki egy olyan megfigyelt ténnyel, amely cáfolja korábbi vélekedéseinket.

Ám az olyasfajta kijelentések igazságával kapcsolatban, mint „7+5=12", semmi kétely nem merül fel: nem tudjuk elgondolni, milyen kísérlet cáfolhatná e tétel igazságát, ha a benne szereplő szimbólumok jelentését nem változtatjuk meg. Az általános nézet szerint a fentihez hasonló kijelentések igazsága független a világ mindenkori állapotától; bármi történjék is, a „7+5=12" mindig, minden körülmények között fennáll. A matematika megkérdőjelezhetetlen igazságokat tár fel; nem véletlen hát, hogy az eszmetörténet során újra meg újra előtérbe került az a törekvés, hogy a filozófiát is a matematika mintájára alapozzák meg, hogy a „végső kérdésekre" hasonlóan biztos válaszokat kapjunk, mint azokra, amelyek egy matematikai egyenlet eredményére kérdeznek rá.

Az a tézis, hogy a matematika tényei mindenkor és mindenhol szükségszerűen fennállnak, arra a következtetésre sarkallta a filozófusokat, hogy azokat a fizikai világ tényeitől független, *pusztán fogalmilag igaz* kijelentések, az úgynevezett analitikus állítások közé sorolják. Ha nem tévedtek, akkor a matematika kérdéseire választ kaphatunk azáltal, hogy elemezzük a matematikai kijelentések logikai szerkezetét. Ebben az eset-

42Danka(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 414

ben a matematika algoritmizálható lenne; minden matematikai igazsághoz könnyűszerrel eljuthatnánk úgy, hogy betápláljuk a megfelelő adatokat egy számítógépbe, és türelmesen várakozunk; a matematikusok géniusza pótolható lenne precízen végrehajtott processzusokkal.

A két, e helyütt tárgyalandó filozófus, Kant és Wittgenstein azonban úgy vélte, hogy a matematika állításai nem sorolhatók a pusztán fogalmilag igaz kijelentések közé, és az emellett felhozott példák kapcsán nem kell kilónyi papírhalmokon keresztül vezetett képletekre gondolnunk. Kant egyenesen azt állította, hogy a fenti tétel, a „7+5=12" sem analitikus állítás.[2] A pusztán fogalmilag igaz (analitikus *a priori*) és a tapasztalatilag igazolható (*a posteriori* vagy empirikus) kijelentések mellett bevezetett egy harmadik kategóriát, a „szintetikus *a priori*" ítéletek csoportját. Azt állította, hogy noha a szintetikus *a priori* tételek igazsága nem bizonyítható a benne szereplő fogalmak elemzése révén (ennyiben nem analitikusak), empirikus tapasztalásra sincs szükségünk ahhoz, hogy igaznak gondoljuk el őket (tehát minden megfigyeléstől függetlennek, *a priori*nak tekinthetők). Kant amellett foglalt állást, hogy a matematika szintetikus *a priori* tételekre alapoz, így aztán – a filozófiát a matematika mintájára felépíteni igyekvő elődeinek törekvését követve – a filozófiától szintetikus *a priori* téziseket várt; szerinte a filozófia – vagy ahogyan ő írta: a tiszta ész – középponti kérdése az, „hogyan lehetségesek szintetikus *a priori* ítéletek?" (B 19, M 65) Erre válaszolva dolgozta ki aztán egész ismeretelméletét, amelynek hatásai az utókorra vitathatatlanok; az eredeti indíttatást azonban, hogy a filozófiát a matematika mintájára kell művelnünk, már közvetlen követői is idejétmúlt törekvésnek látták. Mielőtt azonban e kapcsolat mibenlétére visszatérnék, vessünk egy pillantást arra, mit is kell pontosan értenünk a szintetikus *a priori* fogalmán.

A priori kijelentéseken azokat az állításokat szokás érteni – szemben az *a posteriori* kijelentésekkel – amelyek minden tapasztalástól függetle-

2 Az analitikus kijelentéseken szokás egyszerűen a logikai igazságokat érteni; Kant maga – mint látjuk majd – ennél szélesebb értelemben használja a fogalmat. Másrészt Jaakko Hintikka szerint még egyes elsőrendű logikákban is kimutatható a kanti szintetikus *a priori* megfelelője. Lásd főként Hintikka könyvét (Hintikka, Jaakko [1973]: *Logic, Language-Games, and Information.* Oxford, Clarendon) és tanulmányait (Uő: [1965]: Are Logical Truths Analytic? In: *Philosophical Review,* 74., illetve Uő [1968]: Are Mathematical Truths Synthetic A Priori? In: *The Journal of Philosophy,* 65). Wittgenstein egy helyütt mintha egyenesen azt mondaná, hogy egy olyan alapvető logikai igazság, mint a kizárt harmadik elve is szintetikus (MS 106, 245).

42Danka(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 415

nül adottak számunkra; ha nem is feltétlenül időben, de logikailag megelőznek minden tapasztalati állítást. Ennyiből persze nehéz megmondani, mely állítások is lennének *a priori*ak; az *a priori* használata is aszerint változik az egyes szerzőknél, hogy mely kijelentések tapasztalatfüggetlensége mellett kötelezik el magukat ismeretelméletileg. Az empiristák például – mint David Hume vagy John Stuart Mill – azt tartották, hogy még a matematika tételei sem *a priori*ak, hiszen azok igazságát is csupán megtapasztalni: megtanulni tudjuk. Ezért ésszerűnek tűnik, hogy az *a priori–a posteriori* megkülönböztetést *ne* ezen szempontok alapján tegyük meg, főként, hogy maga Kant is – noha vélhetően éppen ezen határ meghúzása volt közvetve a célja – más irányból közelít a kérdéshez.

A tapasztalástól függő és attól független ismeretek kérdése kapcsán Kant arra keresi a választ, hogy mely vélekedéseink igazságában nem kételkedhetünk? Mivel az *a posteriori* ismeretek függenek valamitől – jelesül a tapasztalástól –, ha a tapasztalásunk félrevezet, akkor tapasztalati ítéleteink tévesek is lehetnek (például hihetjük valóságos történésnek életszerű álmainkat, vagy emlékezhetünk rosszul a dolgokra, amikor felöntöttünk a garatra), míg a tapasztalástól független ismereteink igazsága egyedül ezen ismereteinken múlik, így jobb eséllyel pályázhatnak a biztos tudás zálogának címére. Ezt az okoskodást követve Kant az *a priori* ítéletek[3] ismertetőjegyét azok szükségszerűségében és (szigorú) általánosságában határozza meg. Nem pusztán arról van szó, hogy minden test kiterjedt; minden testnek kiterjedtnek *kell* lennie, azaz nem csupán nem létezik olyan test, amelyik nem kiterjedt, de biztosan tudjuk, hogy nem is fog soha létezni; olyannyira biztos ez, hogy amennyiben látnánk egy testszerű objektumot, amely a „test"-ség minden (egyéb)

3 Fontosnak tartom hangsúlyozni ítélet *(Urteil)* és kijelentés *(Behauptung)* vagy mondat *(Satz)* különbségét. Előbbinek Kantnál fontos teoretikus szerepe van. Ezt ismervén tudhatjuk, hogy nem lehetséges például olyan ítélet, amely *a priori* hamis. (Szemben – mondjuk – a Bennett könyvében foglaltakkal [Bennett, Jonathan ⟨1968⟩: *Kant's Analytic.* Cambridge: Cambridge, University Press]). *A priori* hamis *ítélet* nincs; nem *ítéli úgy* senki, hogy – például – valami nem azonos önmagával, noha vetemedhet ilyen *kijelentésre,* és ez már – természetesen – valóban *a priori* hamis lesz. Ítélet és kijelentés, számunkra adott és magánvaló összemosása ad zöld utat – meglátásom szerint – annak is, hogy végül az analitikust is azonosítsuk az *a priori*val, ami az angolszász világban a negyvenes évek végétől bő négy évtizedig számtalan tanulmányt ihlető analitikus-szintetikus vita egyik forrása volt. Ehhez lásd főként Quine, W. V. O. (1973): Az empirizmus két dogmája. In: *Magyar Filozófiai Szemle,* 2. sz., illetve Uő (1998): In: Forrai Gábor–Szegedi Péter (szerk.) *Tudományfilozófia.* Budapest: Osiris.

42Danka(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 416

kritériumának eleget tesz, de nem kiterjedt, akkor arra nem azt mondjuk, hogy ez kivétel: egy kiterjedés nélküli test, hanem hogy egyáltalán *nem* is *test*.[4] A lehetséges világok szemantikájának[5] fogalmait használó Hintikka Kantot követve azt mondja, hogy egy kijelentés akkor *a priori,* ha az minden lehetséges világban mindenkor fennáll. Mivel az egyes „világok" – a túl erős ontológiai elköteleződést kerülendő helyesebb lenne talán világleírásokról beszélni – tulajdonképpen kijelentések halmazai, azon kijelentések összessége lesz *a priori,* amely a világleírásaink legnagyobb közös osztójának tekinthető, azaz amely minden világleírás közös alapját képezi. Való igaz, szokás is úgy tekinteni a logikára és az elemi algebrára, mint a tudományok közös alapjára, és a bölcselők is ilyesfélét vártak mindig is a filozófiától.

Az analitikus–szintetikus különbség már jóval nehezebben körvonalazható. Még Quine, a múlt század egyik legjelentősebb filozófusa sem tudta kezelni a két fogalompár közötti kanti különbséget.[6] Ez azt a –

4 Megjegyzem, Kant e ponton is tartja magát ismeretelméleti intencióihoz, és nem *ontológiailag* szükségszerű és általános kijelentésekről beszél. Azt írja *A tiszta ész kritikája* bevezetésében: *„…erstlich ein Satz, der zugleich mit seiner Notwendigkeit* gedacht wird, *so ist er ein Urteil a priori;* […] Wird *also ein Urteil in strenger Allgemeinheit* gedacht, […] *so ist es* […] *a priori gültig"* (B 3–4, kiemelés tőlem – D. I). A (vissza)kurzivált *gedacht wird* – pontos grammatikai megfelelő híján: elgondolt (befejezett melléknévi igenévként) – kifejezés azt hivatott szemléltetni, hogy a szükségszerű és általános ítéletek *nem* ontológiai állítások, pusztán azért *gondolandók el* szükségszerűként és (szigorú értelemben) általánosként, mert különben nem működ*het*ne a megismerésünk.

5 A lehetséges világok szemantikája – amely létét Hintikka mellett főként Kripkének köszönheti – a modális elsőrendű logikák gyakori interpretáció-családja, amelyben egy kijelentés szükségszerű, ha minden lehetséges világban igaz, míg univerzálisan kvantifikált (szigorúan általános), ha egy bizonyos világban minden érintett objektumra fennáll.

6 Hilary Putnam arra mutat rá, hogy Quine az „analitikus" és *„a priori"* fogalmakat hellyel-közzel szinonimként kezeli. (Lásd ehhez Putnam, Hilary [1975] The Analytic and the Synthetic. In: *Mind, Language, and Reality.* Cambridge: Cambridge University Press; Uő [1983]: Two Dogmas Revisited. In: *Realism and Reason* Cambridge: Cambridge University Press című tanulmányokat.) Wilfrid Sellars is kiemeli, hogy a szintetikus *a priori* létének kérdése javarészt terminológiai döntés eredménye: azon múlik, hogy mit értünk *a priori*n. (Sellars, Wilfrid [1956]: Is There a Synthetic A Priori? In: Hook, Sidney [szerk.]: *American Philosophers at Work*. New York: Criterion Books). Persze Quine nem Kant-filológus; a problémát megoldhatta volna annyival, ha egyszerűen nem hivatkozik Kant definícióira. A félreértés azonban sokkal mélyebb gyökerű az angolszász Kant-értelmezések tekintetében: attól idegenkedik e hagyomány vezető személyiségeinek java része, hogy bárminemű új – nem fogalmi/logikai – tudást legitimnek ismerjen el, ha az nem a tapasztalásból szár mazik. Okuk erre vélhetően annak elkerülése, hogy a filozófia pusztán olyan légvárak építése legyen, amelyek alapján tetszés szerint bármit lehet igazolni vagy cáfolni. Így nem csupán a

42Danka(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 417

nem is teljesen alaptalan – gyanút ébreszthetni bennünk, hogy Kant megfogalmazása pontatlan.[7] Pedig a königsbergi gondolkodó több meghatározást is ad az analitikus és szintetikus ítéletek mibenlétére. Egyrészt azt állítja: „Vagy a B állítmány az A alanyhoz tartozik, mint valami, ami (rejtett módon) az A fogalomban tartalmaztatik, vagy B teljesen kívül van A fogalmon." Előbbi esetben beszélhetünk analitikus, utóbbiban szintetikus ítéletekről (A 6, B 10, M 58). Pár sorral lejjebb a két fogalom valamilyen homályos azonosságára utal. Később hozzáfűzi, hogy az analitikus ítéletek onnan ismerszenek meg, hogy tagadásuk puszta önellentmondás, míg egy szintetikus tagadása esetén csak egy másik szintetikus ítélettel szembeállítva mutatható ki a tévedés (B 14, M 62). Talán a legszemléletesebb mégis az a megfogalmazás, miszerint az „előbbieket nevezhetnénk magyarázó, a utóbbiakat bővítő ítéleteknek" (A 7, B 11, M 59). Az analitikus ítéletek tehát valamely, már meglévő tudásunkat magyarázzák, míg a szintetikus ítéletek új ismereteket biztosítanak. A tudásunk végső alapja így – bármi legyen is az – csakis szintetikus lehet, hiszen annak igazsága feltétlenül új kell, hogy legyen, különben nem alapulhatna azon minden további tudásunk. Amikor tehát Kant a filozófiát szintetikus *a priori* alapokra kívánja helyezni, nem kevesebbet állít, mint hogy olyan kijelentésekre lelhetünk, amelyek minden lehetséges világ-

fent említett Bennett, de a legjelentősebb brit Kant-interpretátor, Peter Strawson sem tud mit kezdeni a szintetikus *a priori* ítéletekkel – azokkal tehát, amelyek sem fogalmilag, sem tapasztalatilag nem cáfolhatók, ám nem is igazolhatók, s mégis igaznak, sőt: szükségszerűnek gondolandók el. Utóbbi gondolkodó az angolszász Kant-értelmezés bibliájának számító *Bounds of Sense*-ben (magyarul: Strawson, Peter [2000]: *Az érzékelés és jelentés határai.* Budapest: Osiris) gyakorlatilag említést sem tesz arról, hogy mi is az a szintetikus *a priori,* mintha Kant nem ennek a kérdésnek a megválaszolására írta volna *A tiszta ész kritikáj*át.

7 Nem véletlen, hogy az első két kiadás között Kant az analitikus–szintetikus különbségtevésről szóló részt jelentősen átdolgozza. Mindenesetre az itt prezentált meghatározások majdnem szó szerint azonosak nemcsak a két kiadásban, de a közöttük megjelent *Prolegomená*ban foglaltakkal is; az újabb szövegezések inkább részletesebb magyarázatnak, semmint jelentős tartalmi módosításának tekinthetők. Ám ha már itt járunk, meg kell jegyezzem: az *a priori*ra vonatkozó döntő passzusok kifejezetten a második kiadás szövegezésére támaszkodnak, hovatovább míg az első kiadás valamelyest körülírja (A1), hogy mit is ért *a priori*n, addig a *Prolegomena* teljességgel definiálatlanul hagyja a fogalmat. Persze éppen emiatt lehet fontos, hogy a második kiadás szükségesnek látja a fogalom tisztázását. Tehát amint alant Wittgensteinomat az 1930-as évek végéhez kötöm, úgy Kantom az 1783-as évben megjelent *Prolegomena* utáni évek Kantja, aki az *a priori* új definícióját kívánja adni, amely nem támaszkodik sem a terminussá merevedett *Erkenntnis*re vagy *Erfahrung*ra (A1-ben még igen), sem Leibniz vagy mások *a priori*jára.

42Danka(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 418

ban fenn kell, hogy álljanak, ám erre nem a benne szereplő fogalmak adják a biztosítékot. Ezen kijelentések pedig olyan kényszerítő szükségszerűséggel bírnak majd, hogy egész filozófiánkat bátran alapozhatjuk rájuk.

Kant nem hagy kétséget afelől, hogy „valamennyi matematikai ítélet szintetikus" (B 14, M 61), ám azt sem felejti el hozzátenni, hogy „a voltaképpeni matematikai ítéletek mindig *a priori* – s nem empirikus – ítéletek" (B 14, M 62). Elhíresült példája alapján a „7+5=12" nem analitikus, mert a 7+5 összegének fogalmából *nem következik* az, hogy egyenlő lenne 12-vel. Szükségünk van a puszta fogalmakon túl valamire: az elemzés során a szemléletet hívjuk segítségül,[8] amely által felidézünk hét almát, majd még ötöt, utána melléjük tizenkettőt, végül felfedezzük a két halmaz közötti számbeli azonosságot.[9] Ám a 7+5 összegből *még nem tudjuk,* hogy az éppen 12 lesz, csak miután elvégeztük a számolást.

Tegyük fel, valaki azt mondja, hogy „Hét meg öt az tizenkettő". Ha megkérdeznénk tőle, „Biztos, hogy annyi?", feltehetőleg valami olyasfélét válaszolna: „Hát persze, számold ki!". Az igazolás kritériuma a számolni tudás, nem a fogalmak analízise; a fogalmak ismerete persze szükséges, ám nem elégséges feltétele annak, hogy úgy ítéljük meg: „Hét meg öt az tizenkettő". A számok és műveleti jelek mellett valami másra: a *számolásra magára* is szükség van. Az eredmény megkonstruálása, a számolás *aktusa* az, ami szintetikusan hozzáadódik a szimbólumsorhoz, hogy ítélet lehessen belőle.

Wittgenstein egyik példája nyomán könnyebben megérthetjük, hogy – egy hasonló esetet véve – a „2+2=4" nem analitikus.[10] Tegyük

8 A szemlélet *(Anschauung)* fogalmának Kantnál kulcsfontosságú teoretikus szerepe van, amely elemzése sokszorosan meghaladná e tanulmány terjedelmét. E helyütt – vállalva az egyszerűsítésből adódó szükségszerű csúsztatást – értsük e megjegyzést úgy, hogy nem elégséges Kant szerint az öt, hét, tizenkettő, összeadás és egyenlőség *fogalmain* elmélkedni, hanem valamilyen módon a számoknak maguknak meg kell jelenniük előttünk, el kell képzelnünk, meg kell konstruálnunk azokat, ami már kívül esik a puszta fogalmiságon.

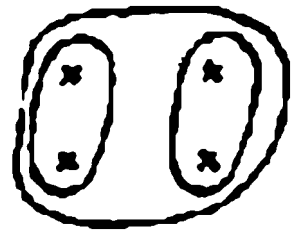
9 Kant eredetileg ujjakkal számol; az almás példát Wittgensteintól kölcsönöztem, csupán azon groteszk kép elkerülése kedvéért, hogy a tizenkét ujj összeszámolásakor valaki netán arra gondolna, hogy a lábujjainkat is igénybe kellene vennünk.

10 A példát (MS 117, 44–45) némiképp megváltoztattam, ám wittgensteini ihletését annak ellenére is kár lenne tagadnom, hogy az osztrák filozófus nem az analitikusság kapcsán hozza fel azt. Mindenesetre a szemléltető ábrákat a *Nachlaß*ból vettem.

42Danka(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 419

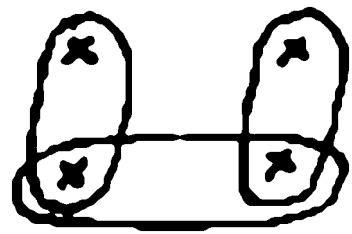
fel, hogy gyermekünket számolni tanítjuk, és ehhez lerakunk az asztalra két almát, majd megkérdezzük, hogy „Hány almát kell még az asztalra tenni, hogy négy legyen?" A kisgyerek nagy valószínűséggel kettőt mond majd (esetenként – *„amint mi most mondanánk,"* hangsúlyozza Wittgenstein – elszámolhatja magát), ez azonban nem jelenti azt, hogy az *egyetlen elgondolható, pusztán fogalmilag helyes* eredmény a kettő lesz.

Ha a kisgyerek helyesen számol, az alábbi rajz alapján követhető módon gondolkodik:



A bal oldali halmazban kettő jel található, míg a nagy halmazban négy; a bal oldali halmazon kívül a nagy halmazban további kettőnek kell lennie; ezt jelöli a jobb oldali halmaz.

Azonban a gyermek számtalan más – hasonlóképp logikus – módon is gondolkodhat. Wittgenstein példája erre az alábbi:



Mivel a bal oldali halmazban kettő jel van, a jobb oldaliban kettő, az alsó halmazban szintén kettő, az egész ábrán pedig négy, a rajz alapján indokolt a kijelentés, hogy „2+2+2=4". Így a gyermek válasza az lesz, hogy kétszer kettőt (avagy: kettőt, majd még kettőt) kell az asztalra ten-

42Danka(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 420

ni a két alma mellé, hogy négyet kapjunk.[11] És persze ennek alapján számos más ábra is készíthető, megannyi eredménnyel.

Kérdésünkre alkalmazva a példát azt mondhatjuk, hogy olyasmi történik akkor, amikor a gyermek kiszámolja az eredményt, amely történésről nem számolhatunk be analitikusan, mivel fogalmi elemzéssel nem szűrhető ki a tévedés, ám empirikus tényállítások formájában sem, hiszen pusztán empirikus úton *láthatnánk,* tapasztalhatnánk azt is, hogy „2+2+2=4". Valahogyan mégis tudjuk, hogy ez utóbbi nem igaz. Valamennyien ugyanúgy hajtjuk végre a műveletet (miután megtanultuk), ám *logikailag* nem zárható ki a lehetősége, hogy ugyanazt a feladatot számunkra is teljesen követhető, „logikus" módon elvégezve más eredményre jussunk; ha a jelek mögötti hozadékot, a kanti szintetikus *a priori*t – vagy mint Wittgenstein szívesebben nevezi: *szabályt* – másképp határozhatnánk meg.

Wittgenstein alant vázolt elképzelése egyértelműen Kant hatása alatt állt. 1929-től kezdve többször felbukkan jegyzetei között az explicit hivatkozás Kant szintetikus matematikafelfogására. Ezen év február 2-án azt írja: „a matematika lényegében szintetikusan megy előre" (MS 106, 285). Egyik legjellemzőbb példája a *Philosophische Betrachtungen* címen ismertté vált feljegyzésekben található, ahol azt írja, hogy az egyenletek logikai struktúrája és a tautológiák közötti különbségtételen valami nagyon hasonlót kell érteni, mint Kant megjegyzésén, hogy a „7+5=12" szintetikus *a priori* ítélet (MS 107, 183). Ugyanez olvasható az 1:3 osztás periodicitásáról a *Philosophische Grammatik*ban (MS 114, 10r), valamint a prímszámok megoszlásáról a *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*ban (MS 124, 133).

El kell ismerni, hogy Wittgenstein e néhány megjegyzését leszámítva alig tesz említést a szintetikus *a priori* mibenlétéről, és ott sem fogalmaz túl világosan, így igencsak nehéz meghatározni, mit is értett rajta. Sőt, egyes tanítványai azt állítják, Wittgenstein tagadta a szintetikus *a priori* létét. Desmond Lee jegyzetei szerint az 1931–1932-es év ötödik cambridge-i előadása során egyenesen olyan mondat hangzik el, hogy „a ra-

11 Mondhatnánk, hogy az ábra alapján *látszik,* hogy az alsó halmaz két almáját már nem kell hozzáadnunk; s Kant is éppen ezt mondja: miután már megkonstruáltuk, persze „látszik", de a fogalmakból *nem következik.* Wittgenstein még óvatosabb: az ábra alapján is csak azért látjuk, mert *úgy nézzük, ahogyan* – erre utal a tévedésre vonatkozó „amint mi most mondanánk".

42Danka(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 421

cionalisták tévednek abban, hogy azt állítják, vannak *a priori* szintetikus ítéletek".[12] Maurice Drury pedig egy 1937-ben folytatott beszélgetésből következtet arra, hogy Wittgenstein a *Filozófiai vizsgálódások* korai változatának írása idején kerülni próbálta az olyasfajta beszélyt, amely szintetikus *a priori*ra hivatkozik, mert „az zavarokhoz és összevisszasághoz vezet".[13] Tanulságos azonban, hogy mintha nem szintetikusság és aprioritás, hanem *aprioritás és kijelentés* összeférhetősége lenne Wittgenstein számára problematikus. A nevezett előadásjegyzet szerint ugyanis „az *a priori* és empirikus nem a kijelentés két fajtája. Mi közös van bennük, hogy »kijelentésnek« kellene hívnunk őket? Egy *a priori* kijelentésnek olyannak kellene lennie, amelynek a jelentése garantálja az igazságát. De a jelentés igazolást követel meg tőlünk."[14] Ennek nyomán úgy tűnik, nem tehetők szükségszerű kijelentések. Ez azonban nem feltétlenül áll szemben a kanti elképzeléssel: csupán az a priori igazságokat nem kijelentés-, hanem parancs- (tehát felszólítás-)formájúnak kell értenünk.[15]

Eckhardt Wüst szerint mindenesetre Wittgenstein mindössze abban értett egyet Kanttal, hogy mi *nem* szintetikus *a priori.*[16] Ezt azonban túlzásnak tartom. Nem valószínű, hogy a köztudomásúlag kevés utalásra hajló Wittgenstein több, egymástól független, matematikafilozófiát érintő helyen együtt említené Kant nevét a szintetikus *a priori*val, ha nem éppen az ő szóhasználatából indulna ki. Természetesen nem vitatom, hogy Kant (elméleti) filozófiájának középponti kérdései ismeretelméle-

12 Lee, Desmond (szerk.) (1982 [1980]): *Wittgenstein's Lectures. Cambridge, 1930–1932.* Oxford: Blackwell, 79.

13 Drury, Maurice (1984): Conversations with Wittgenstein. In: Rhees, Rush (szerk.): *Recollections of Wittgenstein.* Oxford: Oxford University Press, 220.

14 Lásd a Lee szerkesztette előadásjegyzet 79. oldalát. Wittgenstein itt „a priori"-n – akárcsak Carnap vagy Quine – szemlátomást „analitikus"-t ért, s ez szüli vélhetően (átmeneti) problémáit. (Az igazolás – *verification* – Wittgensteinnál *nem* terminus technicus; még a harmincas évek elején sem.)

15 Egy *kijelentés* – kanti megkülönböztetésem szerint: egy ítélőfüggetlen ítélet – szükségszerűsége azt előfeltételezi, hogy lehetséges perspektívafüggetlen megfigyelés; ezt magam (kanti értelemben vett) prekopernikuszi tézisnek tartom. Kant éppen azt mondja, a szintetikus *a priori* nem önmagában szükségszerű, hanem annálfogva, hogy valamennyi további ítéletünk *előfeltételezi,* azaz éppen a mi perspektívánk léte teszi szükségszerűvé. Avagy Wittgenstein változatában: a grammatika szükségszerű szabályai azon *parancsok,* amelyeket betartva egyáltalán tehetők kijelentések az adott játékon belül.

16 Wüst, Eckhardt (1980): Wittgenstein, Kant und der synthetische Character mathematischer Sätze. In: Haller, Rudolf–Grassl, Wolfgang (szerk.): *Proceedings of the 4th Wittgenstein Symposium.* Wien: Hölder–Pichler–Tempsky, 199.

42Danka(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 422

tiek, míg Wittgenstein elméleti kérdései is gyakorlatorientáltak.[17] Abban mindenesetre egyetérteni látszanak, hogy mely kritériumok alapján nevezünk egy állítást szintetikusnak. Sőt, az *a priori*ra is fellelhető olyan kanti definíció, amely teljes mértékben alkalmazható Wittgenstein szabályfogalmára. S ha Wittgenstein időnként tiltakozott is a szintetikus *a priori* kijelentések lehetősége ellen, gyanúm szerint azért tette, mert úgy vélte: nyelvünk határain kívülre kellene hatolni ahhoz, hogy a nyelvkonstituáló szabályokat propozíciós formába öntsük. Kant szerint szintetikus *a priori* ítéletek úgy lehetségesek, hogy feltárjuk a megismerés transzcendentális előfeltételeit. Wittgenstein erre avval felelne, hogy nem feltárnunk kell azokat: pusztán élni velük. Ez persze igen lényeges különbség: Wittgenstein szerint kijelentéseink igazságának feltételeit a közösség nyelvhasználati szabályai *rögzítik;* nincs szükség további reflexióra. Számára így a társadalom matematikához – és más nyelvi játékokhoz (azaz kb. más aktivitási formákhoz) – való viszonyának vizsgálata, a matematika kommunikálhatósága állhatott már az érdeklődés középpontjában.

Wittgenstein példái között kutakodva olyan megállapításokra bukkanunk, mint hogy az „»OBEN« négybetűs" (MS 164, 106–107) és „A Bismarck szó nyolcbetűs" (MS 125 59v) kijelentések szintetikusak, mivel a szavakat össze kell vetnünk a számsorral ahhoz, hogy igaznak fogadjuk

17 Friedel Weinert e tényt elégségesnek véli annak igazolására, hogy „Wittgenstein javaslata nem ad adekvát értelmezést Kant pozíciójára a szintetikus *a priori* kijelentések kérdésében". Leszögezi, hogy „a következő értelemben lenne az egyetlen analógia, amelyet felépíthetünk Wittgenstein interpretációjára a szintetikus *a priori*ról mint a szintaxis szabályairól: a szabályok a gondolkodás [reasoning] lehetőségi feltételeit konstituálják egy bizonyos társadalmilag elfogadott rendszeren belül. Ezek a *mi* gondolkodásunk sarokkövei – nem *minden* gondolkodás szükségszerű és általános feltételei." (Weinert, Friedel [1981]: Wittgenstein on Kant. In: Morscher, Edgar–Stranzinger, Rudolf [szerk.]: *Proceedings of the 5th International Wittgenstein Symposium.* Wien: Hölder–Pichler–Tempsky, 418, ill. 420–421.) Még ha csupán *ebben* az értelemben lenne is igaz a tézisem, jómagam beérném vele. Ám ne feledjük, Wittgenstein sem gondolja azt, hogy lehetséges a miénktől *gyökeresen* eltérő gondolkodás: amikor azt mondja, hogy az oroszlánt – még ha tudna is beszélni – nem értenénk meg (MS 137, 96b), nem azért teszi, mert *nem tudjuk,* hogy az oroszlán beszél-e, hanem mert ha valami beszélésfélét csinálna is, mi soha *nem ismernénk el* azt beszédnek. Ahhoz, hogy valakit vagy valamit gondolkodónak vagy beszélőnek ismerjünk el, aktivitási formáinak bizonyos családi hasonlóságokat kell mutatnia a *mi* gondolkodásunkkal. Az, ami alapvetően különbözik a mi gondolkodásunktól, nem gondolkodás – nem illethető a „gondolkodás" szóval, ahogyan a „varjú" szót sem használjuk az asztalterítőkre, és ugyanazon okból: mert két teljesen különböző dologról van szó.

42Danka(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 423

el az állításokat, ez pedig valami olyasmi, ami „egy kísérlet lehetne" (MS 164, 107), tehát a igazolás módja az empirikus tényállítások igazolásához hasonló struktúrájú. „És ez lehetne az alap arra, hogy az »OBEN négybetűs« mondatot szintetikus *a priori*nak nevezzük" (uo.). E kijelentések szintetikussága tehát abból fakad, hogy nem elégséges a puszta fogalmi elemzés – valami olyasmi kell hozzá, ami az empirikus megfigyelések igazolásában is szerepet játszik. Ennek nyomán nem állíthatjuk azt, hogy a szintetikus kijelentések – legyenek azok akár *a priori*ak – igazsága független lenne minden igazolási kritériumtól, tehát bármit azért mégsem mondhatunk, ráfogva, hogy szintetikus *a priori;* az igazolásuk azonban áttételesebb az empirikus igazságokénál: egy szabály nem igazsága, hanem (konkrét helyzetekre való) alkalmazhatósága révén lesz legitim.

Wittgenstein szerint „a matematikai mondatok szintetikus jellemzője a legszembetűnőbben a prímszámok előre nem látható felbukkanásában mutatkozik meg. De ha azok (ebben az értelemben) szintetikusak, attól még nem kevésbé *a priori*ak" (MS 125, 61r–v). A szintetikussághoz nem fér kétség, hiszen a valamely prímre rákövetkező prím „nem található meg a prímszám fogalmának analízise által" (MS 124, 133). A prímszámokat egyedül úgy határozhatjuk meg, hogy „találomra" próbálgatjuk a számokat, amíg rájuk nem bukkanunk, mivel nem létezik más olyan eljárás, amely megadná az összes létező prímszámot. De amikor rátalálunk egy prímszámra, *tudjuk,* hogy prímszámra bukkantunk, noha korábban sejtelmünk sem volt arról, hogy az adott szám prímszám. Ennek az oka nyilvánvaló: vannak bizonyos szintetikus eljárások vagy szabályok, amelyek az ilyesfajta aktivitásainkkor vezetnek bennünket. Mivel minden kijelentésünk csakis egy adott kalkulus, egy nyelvi játék[18]

18 A kalkulus–nyelvjáték párhuzamot Hintikka véleményére alapozom: „Wittgenstein fejlődése során a harmincas és negyvenes években […] (a) kalkulusok fokozatosan felcserélődtek nyelvi játékokra", írja (Hintikka, Jaakko [1993]: The Original *Sinn* of Wittgenstein's Philosophy of Mathematics. In: Puhl, Klaus [szerk.]: *Proceedings of the 15th International Wittgenstein-Symposium.* Wien: Hölder–Pichler–Tempsky, 33). Egyébként ugyan e munkából úgy tűnhet, Wittgenstein matematikafilozófiáját egységesként kezelem, a másutt kalkulus- és nyelvjátékfelfogásnak nevezett két kép között jelentős eltérések vannak. Wittgensteinom – ezen oldalak erejéig – főként a harmincas–negyvenes évek fordulójának Wittgensteinja. Ám a viszonylagos kontinuitást mutatja az, hogy az utalt megjegyzések időbeli eloszlásából kitűnhet: szerzőnk e matematikafilozófia körvonalait korábbi kéziratiban is számos helyen megelőlegezi (egészen 1929-ig visszamenőleg).

42Danka(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 424

keretfeltételei között lehet értelmes, egy adott prímszám csakis mint a *konvencióban adott*[19] teoretikus entitás „létezik"; a prímszám *mint olyan* nincs addig, amíg azt mint prímszámot nem azonosítottuk. A finitizmussal kapcsolatos állásfoglalását alkalmazva azt mondhatjuk Wittgensteinnal, hogy a „Létezik-e a legnagyobb prímszám?" típusú kérdések *értelmetlenek,* méghozzá azért, mert a prímszámok sorát nem extenzíve, hanem intenzió szerint határoztuk meg: nem soroltuk fel az összes prímszámot, hanem megadtuk azon tulajdonságokat, amelyek alapján bármikor bármiről felismerhető, hogy prímszám-e vagy sem. Vegyük észre: az, hogy van-e legnagyobb prím, nem ténykérdés, hanem bizonyos értelemben *döntés* kérdése; számos – többé-kevésbé ésszerű – szempont alapján azt mondjuk, *legyen* vagy *ne legyen* (egy adott kalkulusban). Vajon hogyan lehetne akkor ez az igazság *a priori*?

A matematikai kalkulusok ilyesfajta szabályai kötelező és teljes érvényű tételei lesznek a kalkulusnak, vagyis – a nyelvi játékok terminológiájára áttérve – a játék szabályai szükségszerűek és szigorú értelemben általánosak minden, az adott nyelvi játékot játszó játékos számára. Ha ugyanis valaki megszeg valamely szabályt (sakkban „L" alakban lép a királlyal, szándékosan ütésben hagyja sorra az összes figuráját, netán számszeríjjal célba lő ellenfele bábuira), akkor nem azt mondjuk rá, hogy *ő kivétel,* rá nem érvényesek a sakk szabályai, hanem azt, hogy vélhetően egy másik játékot játszik. A játék szabályai tehát tekinthetők *a priori*nak a kanti értelemben.[20] Sőt, egyben a játék transzcendentális keretfeltételeiként is érthetők – amint a szintetikus *a priori* ítéletek a kanti megismerés transzcendentális keretfeltételeit adják –, hiszen a játék lehetőségének szükségszerű (logikai) előfeltétele a szabályok ismerete és betartása.

A játékot tanulás által sajátítjuk el – legyen az a sakk, a hétvégi bevásárlás vagy a kettesével való számolás. Ez az oka annak, hogy tapaszta-

19 Wittgenstein matematikafilozófiájának konvencionalista értelmezéséhez lásd főként Michael Dummett álláspontját (Dummett, Michael [1959]: Wittgenstein's Philosophy of Mathematics. In: *The Philosophical Review,* július). Dummett egyébiránt úgy érti Wittgensteint, hogy utóbbi szerint matematika és filozófia – miután élesen különválasztottuk őket – nem sok mindent tartogat egymás számára (Dummett 1959, 326). Magam úgy vélem: éppen kalkulus és próza (azaz matematika és metafizika) kettéválasztása révén lehetséges csak a kettő viszonyát feltérképezni.

20 Meg kell jegyezzem, ez az értelmezés *nem* a szabályértelmezések (valamely) fő csapása. Wittgenstein szabályfelfogása az osztrák filozófus legvitatottabb és legtöbb értelmezésre szoruló nézetei közé tartozik.

42Danka(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 425

lás*szerű*nek tűnhet az arról való megbizonyosodás, hogy 2+2=4. Ez azonban nem jelenti azt, hogy az állítás *a priori* jellege csorbulna. Ha valakinek az jönne ki, hogy „2+2+2=4", még ha alátámasztaná is, nemigen akadna senki, aki elismerné, hogy egy új tudományos felfedezés tanúja lehet, hanem azt vennénk fontolóra, hol *hibázott,* mert hogy hibázott, abban valamennyien biztosak lennénk.

Mindamellett a szabályok nem tekinthetők tényleírások általánosításainak sem. Wittgenstein szerint – mint Hans-Johann Glock megjegyzi – „az empirikus kijelentésekről elmondható, hogy lehetséges helyzetállapotok leírásai, de a szükségszerű kijelentésekről nem mondható el, hogy szükségszerű helyzetállapotok leírásai. Mivel a szerepük egyáltalán nem leíró."[21] A wittgensteini szintetikus a priori *nem ítélet;* még csak nem is kijelentés, mivel semmilyen leíró funkciója nincs. Wittgensteinnál szükségszerű *kijelentés* egyszerűen nem létezik: a kijelentés tényekre vonatkozik, a tényeknek pedig van egy olyan sajátosságuk, hogy vagy fennállnak, vagy nem. Így aztán a rájuk vonatkozó kijelentés is vagy igaz, vagy hamis; ám ami szükségszerű, az nem *lehet* hamis: arról nem tehető kijelentés, mivel az *nem ténykérdés.*[22]

Wittgensteinnál a matematika normatív jellege lesz az, ahol szinteticitás és aprioritás ötvöződik. „A matematika – írja – normák hálójából épül fel" (MS 124, 181), a kalkulust normák alkotják. Az *a priori* fogalma – modális jellegénél fogva – könnyen interpretálható egy deontikus logikában, amelyben a „kell" funktor a „szükségszerű, hogy" helyett a „kötelező, hogy" jelentést kapja: a természeti szükségszerűség helyére – amely Kantnál sem szerepelt egyértelműen, ám ő nagyobb teret engedett egy ilyesfajta értelmezésnek – egy „belső" kényszer kerül: az *a priori* szabályokat be kell tartanod, hogy a nyelvi játékot játszhasd, azaz hogy a közösségünk tagja légy. Mindamellett éppen e szabályok azok, amelyek soha nincsenek „ott" cselekedeteinkben; a 2, 4, 6, 8, … számhalmazhoz mi magunk *adjuk hozzá* a szabályt, s ennek révén egy teljességgel új entitást konstruálunk: a 2, 4, 6, 8, … *számsort.* Ennyiben a matema-

21 Glock, Hans-Johann (1992): Wittgenstein vs. Quine on Logical Necessity. In: Tegharian, Souren–Serafini, Anthony (szerk.): *Wittgenstein and Contemporary Philosophy.* Wakefield: Longwood Academic, 155.

22 Vö. Glock, Hans-Johann (1996): Necessity and Normativity. In: Sluga, Hans–Stern, David (szerk.): *The Cambridge Companion to Wittgenstein.* Cambridge: Cambridge University Press.

42Danka(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 426

tika normativitása miatt lesz szintetikus: akár két számból képesek vagyunk tetszőleges hosszúságú számsor(oka)t generálni, amelyek ez által az aktus által jönnek majd létre.

Nyíri Kristóf kiemeli, hogy „Wittgenstein a matematika kapcsán is szociológiai kategóriákban gondolkozik",[23] amennyiben a matematika tételeit elfogadni számára annyit tesz, mint egy közösséghez tartozni. A matematika nem *leírja* a világot, hanem bizonyos világhoz való viszonyulási módokat *ír elő,* amelyek aztán vagy alkalmazhatók a világgal/ban való interakcióink során, vagy nem. Egy matematikai kijelentés bizonyos értelemben nem is lehet igaz, csupán *helyes* (egy adott kalkulus függvényében): jól vagy rosszul végezzük el a műveleteket, engedelmeskedünk a szabályoknak, vagy új kalkulust kezdünk írni. Amikor arra szólítunk fel valakit, „Számold ki, hogy mennyi kettő meg kettő!", nem azt kérjük tőle: „Végezz el egy kísérletet, hogy mennyi kettő meg kettő!", hanem azt: „Csatlakozz hozzánk; azok közösségéhez, akik úgy tartják, a »kettő meg kettő« összeg mindig szükségképpen négyet fog eredményezni!"

A kanti szintetikus *a priori* metodológiai szerepe már ebbe az irányba mutatott, ha Kant maga nem járta is végig az utat. A szintetikus *a priori* funkciója – függetlenítve az ismeretelméleti vonatkozásaitól – a szükségszerűség, általánosság, konstruktivitás ötvözése: az emberi aktivitás – noha Kantnál még speciálisan az emberi gondolkodás – lehetőségének feltételeit hivatott megadni.

Wittgensteinnak tehát – úgy vélem – Kant nagy segítségére volt abban, hogy elforduljon azon nézetektől, miszerint a matematika akár analitikus, akár empirikus tudomány lenne. Mind Kant, mind Wittgenstein filozófiája mintául használta a matematikát: Kant a filozófiát a matematikához hasonlóan szintetikus *a priori* tételekre kívánta alapozni, amint Wittgensteint is nagyban segítette a nyelvjátékok mélygrammatikájának vizsgálatában a matematikai kalkulusok szabályainak elemzése. A két kategória igen hasonló kritériumokat elégít ki; mindkettő olyan szükségszerű, általános igazságokat foglal magában, amelyek sem fogalmilag, sem empirikusan nem igazolhatók vagy cáfolhatók, mivel nem igazolhatók/cáfolhatók egyáltalán: csak követendők (vagy elvetendők).[24] Köve-

23 Nyíri Kristóf (1983): *Ludwig Wittgenstein.* Budapest: Kossuth, 86.
24 Vö. Glock 1996, 211.

42Danka(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 427

tendők; Kantnál amiatt, mert a tényszerűen meglévő tapasztalás szükségszerű előfeltételei, Wittgensteinnál pedig azért, mert követésük nélkül nem játszanánk tovább a megkezdett nyelvi játékot: megszűnnénk a közösségünk tagjai lenni.

Azzal, hogy a matematikát mindketten szintetikus tudományként értik, filozófiájuk alapjaiban *szintetikus* elmélet lesz. Ez igaz Wittgensteinra éppúgy, mint Kantra, jóllehet előbbi az egyik bálványa annak az irányzatnak, amely a filozófiát analitikus *a priori* tudománynak tartja. A filozófia mint szintetikus, normatív diszciplína (a kései) Wittgensteinnál már levetkőzheti alapvetően ontologikus-episztemologikus beállítottságát, feladva azt a vélekedést, hogy a filozófiának a „végső kérdésekre" úgy kell válaszolnia, hogy *leírja* a világ szerkezetét.

A matematika szintén nyerhet abból, amit a fenti filozófusok mondtak róla. Wittgenstein kantiánus meglátásai nyomán jobban elkülöníthető kalkulus és próza, matematika és metamatematika: tudomány és metafizika. Kant és Wittgenstein – ha figyelemre méltatják őket – megszabadíthatják a matematikusokat az olyan értelmetlen kérdéseken való töprengéstől, mint a végtelen, a matematikai objektumok, vagy a matematika igazságkritériumainak kérdése. A matematika és matematikai logika tankönyvei ugyanis – gyanúm szerint – tele vannak naivan formulák mögé bújtatott metafizikai problémákkal. Ennek felismeréséhez pedig nem árt ismerni a metafizika történetét.