43Tanacs(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 428

Tudás és tévedés a matematikában*

Episztemológiai megfontolások a matematika osztálytermi tanításának és a tudás ellenőrzésének helyzeteihez

Tanács János

1. BEVEZETŐ

Az alábbi tanulmányban a matematikai tudás osztálytermi ellenőrzésének jellemző helyzeteiből kiindulva a tudás „igazolt igaz hit" felfogásának individualista értelmezését vizsgálom. Az írás középpontjában az osztálytermi, illetve a tudományos matematikai tudás és tévedés megkülönböztethetőségének problémája áll. Azt igyekszem megmutatni, hogy ha a tudást az individualista felfogás keretei között értelmezzük, akkor a tudás és a tévedés egyes szám első személyű megkülönböztethetősége jogos követelmény, és hogy ezt a kívánalmat nem képes teljesíteni. A dolgozat keretét az osztálytermi szituációra vonatkozó pragmatikai megfontolások szolgáltatják. A dolgozat felépítése során és a végső meglátások megfogalmazásakor azt tartottam szem előtt, hogy alkalmazott filozófiaként legyen mondanivalóm a matematikatanítás episztemológiája és résztvevői, azaz a tanulók, illetve a tanárok számára is.[1] Emellett mind-

* A dolgozat elkészítését az OTKA F 032062. és a T 037504. számú pályázata támogatta. Köszönettel tartozom Fehér Mártának, Benedek Andrásnak, Demeter Tamásnak, Margitay Tihamérnak és Zemplén Gábornak észrevételeikért és javaslataikért.

1 Köszönetemet szeretném kifejezni a Külvárosi Tankör Alapítványi Középiskolának, amely a kis létszámú csoportokra alapozott oktatási formájával a tapasztalatszerzés lehetőségét biztosította számomra, de legfőképpen azoknak a diákoknak, akik az elmúlt évek során megengedték, hogy bepillantást nyerjek képességeik finomszerkezetébe, és nemegyszer beavattak feladatmegoldási stratégiáik sémáiba és trükkjeibe.

43Tanacs(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 429

végig igyekeztem a probléma lehető legáltalánosabb megfogalmazását és elemzését nyújtani, és a filozófiai problémák „gordiuszi csomóinak" átvágásakor csak a legkevésbé specifikus érvelést alkalmazni.

2. AZ OSZTÁLYTERMI MATEMATIKATANÍTÁS EPISZTEMOLÓGIAI INDIVIDUALIZMUSA

Induljunk ki a tudást és a tanítást egyaránt jellemző hétköznapi helyzetekből. A tantermi írásbeli dolgozatok, a zárthelyik vagy az írásbeli vizsgák valamiképpen jellemzik a tudást, hiszen az elsajátított tudás ellenőrzésének szituációiként tekintünk reájuk. Ám mint ilyenek a tudás fogalmával kapcsolatos előfeltevéseket foglalnak magukban.

A szem előtt tartott helyzetekben az alany társaktól függetlenül tevékenykedik: egyedül állítja elő eredményeit, majd ezek elfogadásáról vagy elvetéséről is saját maga dönt. Az alany számára a tudásprezentálás azzal a pillanattal ér véget, amikor produktumát kiadja a kezéből. Ezen túlmenően nincs beleszólása a dolgok menetébe. Az ily módon körülhatárolt szituáción belül kognitív produktumáért egyedül ő tartozik felelősséggel: sikeréért éppúgy övé az érdem, mint ahogy tévedéséért is kizárólag egyedül őt terheli a felelősség.

Másfelől e helyzetek azért is lényegileg individuálisak, mert teljességgel nélkülözik a kognitív hierarchia azonos szintjén álló szubjektumok bármiféle interakcióját. Ez Magyarországon az osztálytermi tudásátadás folyamatára általánosságban is igaz: a tanulási folyamatban alig-alig kapnak szerepet az egynél több tanulóra kiterjedő feladatmegoldási és -értékelési szituációk,[2] az pedig bizonyos, hogy a matematikai eredmények elfogadásával vagy elvetésével kapcsolatos, egynél több individuumot feltételező felelősségvállalás teljes egészében ismeretlen.

Az elsajátított tudás ellenőrzésének szituációja, az alany szemszögéből a tudásdemonstrálás, magányos vállalkozás. A tudással kapcsolatos

2 A kooperatív tanulással kapcsolatban lásd Dreyfus, Tommy–Eisenberg, Theodora (1996): A matematikai gondolkodás különböző oldalairól. In: Sternberg, Robert J.–Ben-Zeev, Talia (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete.* Budapest: Vince Kiadó, 249–278. A kooperatív *versus* individuális matematikatanulás előnyben részesítésének szociokulturális (etnikai) alapú különbségeivel kapcsolatban lásd Uők uo.

43Tanacs(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 430

problémái lényegében egybeesnek az egyedülállónak feltételezett megismerő szubjektum kérdéseivel. Ez lehetővé teszi, hogy a tudásprezentálás helyzeteit könnyűszerrel képezzük le magányos megismerőt feltételező ismeretelméletbe és tudáskoncepcióba. A vizsgaszituáció ugyanis a lehető legteljesebb mértékben megvalósítja az ismeretelméleti individualizmus azon absztrakt jellemzését, amely szerint „a megismerő minden tapasztalatot maga szerez meg, minden következtetést maga végez el, minden információra ő emlékezik".[3]

3. AZ OSZTÁLYTERMI MATEMATIKAI TUDÁS KONCEPCIÓJA

Most tehát egy individuális és az osztálytermi körülményekhez is illeszkedő tudáskoncepció után kell néznünk. E feltételeket kiválóan megvalósítja az a felfogás, amely a tudás fogalmát az „igazolt igaz hit" formulával definiálja. A formula szokásos, filozófiailag precíz megfogalmazása a következő:

Szubjektum *S* akkor és csak akkor tudja, hogy *p*, ha:
(1) szubjektum *S* hiszi, hogy *p*,
(2) *S* igazoltan hiszi, hogy *p*,
(3) és *p* igaz.

Ez a tudáskoncepció éppen azon fogalmi összetevők értelmében individuális, amelyekre az osztálytermi tudásprezentáció vizsgálatához szükségünk van.[4] Ugyanakkor a formula egyes feltételei, különösen, ami az igazolás szubjektumhoz kapcsolásának lehetséges módjait illeti, az individualizmus erősebb, illetve gyengébb értelmezéseit is megengedik. Az általunk vizsgált osztálytermi tudásellenőrzési szituációk azonban olyan szociálisan meghatározott kötöttségekkel rendelkeznek, amelyek kizárják, hogy a szigorú értelemben vett individualizmustól akár a legcsekélyebb mértékben is eltávolodjunk. A standard vizsgahelyzetben ugyanis

3 Lásd Laki János tanulmányát e kötetben, valamint vö. Tanács János (2002): Egyedül nem megy?! Az euklideszi ötödik posztulátum direkt bizonyításainak rehabilitációja – egy kollektív episztemológia szemszögéből. In: Margitay Tihamér–Forrai Gábor (szerk.) (2002): *Tudomány és történet.* Budapest: Typotex Kiadó, 353.

4 A részleteket illetően lásd Benedek András tanulmányát e kötetben, valamint Benedek András (2003): Tudás és normativitás. In: *Világosság,* 1–2: 166.

43Tanacs(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 431

„a tudás értékű állításnak *egy és ugyanazon* (individuális) *S* szubjektum számára kell jusztifikáltnak lennie, mint aki hiszi, saját ismeretének tekinti azt".[5]

A vizsgahelyzet társas szituációba ágyazottsága paradox módon éppen abban nyilvánul meg, hogy a nyitva hagyott értelmezési lehetőségek közül a szigorúbb, individualistább értelmezést kell előnyben részesítenünk. A társas szituációba ágyazottságából származó kötöttségek megtiltják *S*-nek, hogy az osztályeminens vagy a padszomszéd „szakértői tudását", „tekintélyérveit" vagy „tanúságát" jelölhesse meg tudásának forrásául, azaz kizárják, hogy „a tudásértékű ismeret az ismerettel rendelkező megismerő alanytól eltérő *más* szubjektum számára, vagy ne az ő vélekedésének/hitének vonatkozásában legyen jusztifikált".[6]

Következőnek a harmadik feltétel illeszkedését vizsgálva az a kérdés, hogy mi felel meg a tudáskoncepció *p* állításának, illetve, hogy mennyiben jogosult ennek a tudást szűken értelmező definíciónak az alkalmazása? Ez a meghatározás ugyanis csupán a propozicionális tudást jellemzi, és ezzel figyelmen kívül hagyja a nem explikálható képességeket, készségeket és jártasságokat, azaz mindent, ami a tudás prezentálása során nem ölthető szimbolikus-nyelvi formába.

A vizsgahelyzetekben szerepet játszó feladatokhoz azonban olyan végeredmény tartozik, amely mindig megfogalmazható propozicionális formában. Így, bár a feladatmegoldás és az ellenőrzött tudás esetleg magában foglal nem propozicionális tudást is, a végeredményt kimondó *p* állítást tekintve a tudás propozicionális formát ölt.

De vajon tekinthetjük-e a vizsgafeladat megoldása során előállított lépéseket igazolásnak? Először is: a tanár különbséget tesz két megismerő között, akik egyaránt hiszik a helyes megoldást (azaz hiszik a végeredményt és az igaz), ha egyikőjük az általa előállított megoldási lépések következtében hiszi, míg a másik csak a tőle különböző másvalaki által előállított lépések ismeretében, azaz közvetett módon hiszi.[7] Az utóbbi esetet a tanár nem hagyja jóvá tudásként: az osztálytermi tudásellenőrzés során még a lépések ismerete, és a megértés ebből következő *lehető-*

5 Lásd Benedek e kötetben, valamint Benedek 2003, 167.

6 Benedek 2003, 167.

7 A tanúsággal, a tanúság révén igazolt hittel kapcsolatban lásd Laki e kötetben szereplő írását, míg az igazolás szubjektumhoz rendelésével kapcsolatban lásd Benedek e kötetben szereplő írását.

43Tanacs(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 432

sége is kevés. Itt az igazolást birtokolni annyi, mint képesnek lenni előállításukra. Ha pedig maga a szubjektum nem képes a hitét megalapozó igazolást is előállítani, akkor nem rendelkezik tudásértékű ismerettel.[8]

Ha például a tanuló egyáltalán nem tud eljutni ehhez a *p* állításhoz, következésképpen a feladat kontextusán belül nem ismeri, és ennélfogva nem hiszi *p*-t, akkor *S* nem tudja, hogy *p*. *S* akkor sem rendelkezik tudással, ha valahonnan sejti, hogy *p*, de nem képes a *p* igazságát megfelelő módon alátámasztó lépéseket előállítani. És végül, ha *S* hibát követett el a feladat lépéseivel kapcsolatban, akkor számára egy *p′* állítás jelentkezik végeredményként a megfelelő *p* helyett. Ekkor *S* hiszi, hogy *p′*, és igazoltan hiszi, hogy *p′*, ám a feladatban elkövetett hiba folytán, *S* hitével ellentétben, *p′* hamis. Mindennek következményeként *S* azt sem tudja, hogy *p′*, és értelemszerűen azt sem, hogy *p*, mivel *S*-nek nincs *p*-vel kapcsolatos hite, vagy az nem igazolt, vagy téves.

A tanár szemében éppen az jelenti a tudás birtoklását, ha a tanuló (a kompetenciaszintjének) megfelelő lépéseket előállítva képes bejárni a végeredményhez vezető utat, és ha a feladat – a tanár által is elismerten – végeredményének számító, a végeredményt kimondó *p* állítást ezekre a lépésekre alapozva tudja.

Úgy vélem tehát, hogy a háromkomponensű tudásformula, a formula szigorúan individualista értelmezése mellett, adekvát annak a szituációnak a jellemzésére, amelyben a tanulónak számot kell adnia tudásáról. A formula révén mindazok az esetek, amelyek a tanár szemszögéből a tudás vagy a nem tudás eseteinek számítanak, leírhatók, kezelhetők és osztályozhatók.

Látható azonban, hogy a tudással kapcsolatos vizsgálódáshoz két nézőpont adott számunkra.

8 Ezt a problémát számunkra a legnyilvánvalóbb módon a csupán számítógéppel kivitelezhető matematikai bizonyítások, például a térképszínezési négyszínsejtés Appel–Haken–Koch-féle bizonyítása veti fel. Az episztemológiai szubjektum (ember vagy gép) és a hozzárendelt eljárás eddig ismeretlen szétválása az ortodox értelmezés szerint kérdésessé teszi, hogy a mi (emberi) tudásunknak tekinthetjük-e? Tymoczko felfogásában ez a bizonyítás áttekinthetőségével kapcsolatos követelménynek a közvetlen, a formalizálhatóságával kapcsolatos elvárásnak pedig közvetett sérülését jelenti (Tymoczko, Thomas [1986]: The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance. In: Uő [szerk.]: *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Boston: Birkhäuser, 243–266). A problémát a tanúság szempontjából elemzi Coady (Coady, C. A. J. [1992]: *Testimony. A Philosophical Study.* Oxford: Clarendon Press, 259–260).

43Tanacs(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 433

Az egyik a tanuló, a megismerés alanyának nézőpontja, annak nézőpontja, akinek tudásáról szó van. A másik az episztemológiai hierarchiában felette álló tanár nézőpontja: az a perspektíva, ahonnan a megismerőt szemügyre vesszük, és tudását értékeljük. Ez a tudás külső nézőpontja, amelyet rendszerint azonosítanak az objektivitás perspektívájával. Ez összhangban van azzal, hogy a tudás „igazolt igaz hit" felfogása úgynevezett objektív tudáskoncepció: a tanár objektív nézőpontból értékeli a tanulók tudását. Az objektív nézőpont letéteményese a tanár. Ő az a személy, aki arra jogosult, hogy objektíve értékelje az „igazolt igaz hit" koncepció kritériumainak teljesülését, és erre alapozva osztályozza a megismerő individuum teljesítményét.

Ahhoz, hogy e két nézőpont viszonyát jobban lássuk, valamint, hogy az elemzésem számára alkalmas nézőpontot kijelölhessem, röviden foglalkoznunk kell az objektív tudásfogalom jellemzőivel.

4. AZ „IGAZOLT IGAZ HIT" TUDÁSKONCEPCIÓ JELLEMZŐI

A tudás objektív felfogása

A tudás mibenlétével kapcsolatos ismeretelméleti vizsgálódások egyik fő indítéka a tudás objektív fogalmának meghatározása. A felfogás szerint „a tudás előfeltétele a megismerő megfelelő viszonya az adott hithez, nevezetesen *S*-nek azt kell hinnie, hogy *p*, hogy tudhassa, hogy *p*. Ezenfelül azonban objektív, a megismerő hiteitől független kritériumok határozzák meg, hogy *S* tudja, hogy *p* vagy csak tévesen hiszi azt, hogy *p*."[9] Ezeket a független kritériumokat az episztemológiai vizsgálódás eredményeként előálló tudáselméletnek kell szolgáltatnia.[10]

Közös vonása az elemzési törekvéseknek, ahogyan a tudásfogalom objektivitását értelmezik. A tudáselmélet kritériumainak birtokában az, hogy mi számít tudásnak, nem lehet a megismerő önkényének függvénye. Egy ilyen kritériumrendszer birtokában csupán az érem egyik, és a felfogás szerint kevésbé lényeges oldala, hogy a megismerő „szubjektí-

9 Margitay Tihamér (2002): Quine, megismerés és kognitív szabadság. In: Margitay–Forrai 2002, 19.

10 I. m. 20.

43Tanacs(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 434

ve" mit tekint tudásnak, mivel az érme másik, és az objektivista alapállás szerint meghatározóbb oldala, hogy a tudáskritériumok fényében is annak minősül-e.[11] Azzal, hogy a koncepció megmondja, mi számít tudásnak, egyúttal azt is megmondja, hogy mi nem. Következésképp általában is igaz, hogy a kritériumok teljesülése vagy nem teljesülése legalább elvileg képes elválasztani a tudás, illetve a nem tudás eseteit.

Mivel jelenleg a tudással kapcsolatos elméletekről általában beszélünk, ezért amikor az előbbi megfontolást követelménnyé emeljük, akkor magukkal a tudáskoncepciókkal szemben támasztott követelményről, az objektív tudáselméletekre vonatkozó metakritériumról van szó. Ezt a tudáselmélet *diszkriminativitásával* kapcsolatos követelménynek nevezhetjük: a tudás objektív elméletének diszkriminatívnak kell lennie, azaz olyan kritériumokat kell szolgáltatnia, amelyek teljesülése vagy nem teljesülése alapján egy adott hitről, egy adott episztemológiai szituációban legalább elvileg el lehet dönteni, hogy tudásnak vagy nem tudásnak minősül-e.[12]

5. SZEMÉLYES TUDÁS

Úgy tűnik, hogy a kritériumok érvényesítésének, azaz az objektivitásnak a nézőpontja a megismerés alanyának perspektívájától különböző külső nézőpont. A tudás esetének fennállásával kapcsolatos döntést ebből a külső nézőpontból kell meghozni. A szubjektivizmus önkényességének elkerülését az látszik biztosítani, ha a kritériumokat az episztemológus szolgáltatja a tudáselmélet keretében, majd teljesülésüket is ő felügyeli-értékeli a konkrét episztemológiai szituációban. A szubjektív önkényesség elkerülését, azaz a kritériumok függetlenítését a megismerő hiteitől az látszik biztosítani, hogy az objektivitás nézőpontját függetlenítjük a megismerő perspektívájától, és egy külső, harmadik személyű nézőponttal, valójában implicite az episztemológus nézőpontjával azonosítjuk. A tudáselméletek azonban ily módon nemcsak a kritériumokat

11 Uo.

12 Uo. Meglátásom szerint Platón *Theaitétosz*ában a tudás második meghatározási kísérletével (a tudás igaz vélemény, 187a–201c) foglalkozó szakasznak is tudás és tévedés megkülönböztethetősége a fő problémája. Szókratész a megkülönböztethetetlenségből a definíció elégtelenségére következtet.

43Tanacs(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 435

szolgáltatják, hanem – a megismerő kezéből kivéve a kritériumok érvényesítésének jogát – igényt tartanak egy olyan sajátos nézőpontra, amely a tudás számára kizárólagosan legitim.

A kérdést azonban fordítva is feltehetjük: szükséges-e az önkényesség elkerüléséhez, hogy a megismerő hiteitől független kritériumokat egy külső nézőponthoz kössük? Ugyanakkor annak elfogadásával, hogy az ismeretelméleti vizsgálódás szolgáltatja a tudás kritériumait, még nem köteleztük el magunkat amellett, hogy a tudáselméletet nem tesszük próbára a megismerő nézőpontjából.

A megismerő perspektívájának a tudás számára legitim nézőpontként való elfogadását gyakorta azonosítják a szubjektivizmussal, míg a külső nézőpont elfogadását az objektivizmussal, ezeket pedig rendszerint egymást kizáró lehetőségekként állítják szembe.[13] Ez azonban hamis dilemmának tűnik.

Kiútként mutatkozik ugyanis egy harmadik lehetőség: a megismerő elfogadhatja saját tudásával kapcsolatban, hogy az nem pusztán az, amit saját kénye-kedve szerint annak tekint, hanem az, ami az episztemológus által szolgáltatott objektív tudáselmélet függvényében is annak minősül. Ez pedig alapvetően különbözik attól az egyszerű szubjektivista tudásfelfogástól, amely nem hajlandó elismerni, hogy nem tekinthet bármit tudásának, és nem hajlandó alárendelni magát, hiteit az objektív tudáselmélet követelményeinek.

A tudás ilyen, harmadik típusú felfogása a személyes tudás Polányi Mihálytól származó meghatározásával mutat rokonságot. Polányit követve úgy jellemezhetjük a személyes tudás fogalmát, hogy amennyiben a megismerő olyan követelményeknek rendelődik alá, amelyeket önmagától függetlennek ismer el, tudása nem szubjektív (ennyiben tehát objektív); de amennyiben a megismerő saját, szubjektív perspektívájából hozzáférhető tudásáról van szó, nem is objektív.[14]

A tudáselméletek kritériumrendszereivel szemben előírt diszkriminativitás a személyes tudás koncepciójára a következőképpen fogalmazható át. A személyes tudás elméletének olyan kritériumokat kell szolgáltatnia, amelyek teljesülése vagy nem teljesülése alapján egy adott hitünk-

13 Lásd például Rescher, Nicholas (1997): *Objecitivity. The Obligations of Impersonal Reason*. Notre Dame, Indiana: University of Notre Dame Press, 13.

14 Polányi Mihály (1994): *Személyes tudás.* I–II. kötet. Budapest: Atlantisz Kiadó, II. kötet: 95.

43Tanacs(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 436

ről, egyes szám első személyű nézőpontból, egy adott episztemológiai szituációban legalább elvileg el lehet dönteni, hogy tudásnak vagy nem tudásnak minősül-e.

Mielőtt továbblépnénk, nézzük meg, hogy miért érdemes komolyan vennünk és szisztematikus vizsgálatnak alávetnünk a megismerő szubjektum perspektívájából hozzáférhető tudást – akkor is, ha a tudáselméletet és kritériumait objektivista alapállású elemzés szolgáltatja.

Először is: a mi tudással kapcsolatos problémánk, amennyiben magunkat megismerő alanynak is tekintjük, mindig egy belső nézőpont problémája is. Kérdésünk az, hogy saját, egyszer és mindenkorra magunk mögött hagyhatatlan perspektívánk számára mit mond a tudáselmélet: adott esetben mit kell tennünk ahhoz, hogy tudással rendelkezzünk, mennyire bízhatunk meg saját tudásunkban, illetve milyen eszközeink vannak arra, hogy rájöjjünk tévedésünkre.

A másik érv szorosan összefügg azzal a kérdéssel, hogy miért nem vonhatjuk be az elemzésbe az objektivitás interszubjektivitásként történő értelmezését. A személyes vélekedések megalapozását előtérbe állító, „a tudást mindenekelőtt az igazságra való törekvésként felfogó hagyomány szerint" ugyanis „az igazság e tradíció szerint abban a minimális értelemben objektív, hogy interszubjektív".[15]

Interszubjektivitás – de milyen szubjektumok között? Minthogy a tudás „igazolt igaz hit" koncepciója egyszerre individualista *és* objektivista, ezért az episztemológiai individualizmus absztrakcióját mint gondolatkísérletet komolyan véve legfeljebb egyetlen megismerőt feltételezhetünk. Egy ilyen univerzumban nincsenek megismerő szubjektum*ok,* hiszen feltevés szerint legfeljebb egyetlen szubjektum létezik: első körben tehát a szubjektumok közötti ellenőrizhetőség nem értelmezhető.[16] Ugyanezt megismételhetjük az episztemológus és az általa megfigyelt megismerő viszonyában is: hacsak nem akarjuk elfogadni, hogy a megismerő és az episztemológus univerzuma úgy szigorúan individuális, azaz egyszemé-

15 Vö. Benedek tanulmányát e kötetben (1. fejezet), valamint Benedek 2003, 163.

16 Az elemzés keretein belül ragaszkodni fogok az episztemológiai individualizmus eredeti megfogalmazásából adódó megszorításhoz, amely szerint legfeljebb egyetlen megismerőt feltételezhetünk. Ennek okait a dolgozat végére látni fogjuk. A feltevés feladása mellett szóló, és az individualizmussal összeegyeztethető érveket illetően, valamint azzal kapcsolatban, hogy ez hogyan tevődik át az individuumok közötti kommunikációval kapcsolatos feltevésekre, lásd Tanács 2002, 353–357.

43Tanacs(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 437

lyes, hogy „ketten vannak egyedül", akkor el kell fogadnunk, hogy a megismerő és az episztemológus perspektívája nem választható szét, és hogy az objektivitásnak nincs más értelmes perspektívája, mint a megismerő belső nézőpontja. Ez felel meg az individualista és objektivista alapállást egyaránt méltányoló és magába foglaló megközelítésnek.

Az álláspont, amit a következőkben elfoglalok, a megismerő első személyű perspektíváját tekinti a tudás legitim nézőpontjának. Vizsgálódásom középpontjába a tanulót mint az osztálytermi tudásprezentáció körülményei közepette a tudásával szemben elkötelezett megismerőt állítom, és ezzel összefüggésben vizsgálom a tudás és tévedés megkülönböztethetőségével kapcsolatos problémákat, valamint megoldásuk távlatait.

Ez azzal az egyszerű követelménnyel jár, hogy a vizsgált tudásfogalmat át kell fogalmazni az egyes szám első személyű perspektívának megfelelően. Ez az „igazolt igaz hit" *(I^2H)* koncepció személyes tudásként történő értelmezése: ez az, amelyet adekvátnak tekinthetünk az objektivizmus és a szigorú individualizmus összeegyeztetésére. Az a kérdés, hogy az „igazolt igaz hit" koncepció ortodox individualizmusa és objektivizmusa valóban összeegyeztethető-e, jelen tanulmányban azzal a kérdéssel azonos, hogy diszkriminatív-e a személyes tudás elméleteként?

6. AZ IGAZSÁG ELJÁRÁSFÜGGÉSE

Az I^2H tudáskoncepció a kritériumokat nemcsak a megismerő hiteitől, hanem egymástól is függetlennek tekinti. Ez azt jelenti, hogy a feltételek közül sem egynek, sem bármely kettőnek a teljesülése nem vonja maga után a megmaradó(k) teljesülését – így a tudás esetének előállását sem.[17] A számunkra fontos probléma az, hogy a p-t igaznak mutató igazolási eljárás nem vonja maga után, hogy p valóban igaz. Ebből pedig az látszik következni, hogy: bár a p igazságában való hitünket az eljárásra kell alapozni, ám tudásunkat nem alapozhatjuk pusztán ugyanerre: hiszen p valójában, az eljárás végeredményétől függetlenül lehet hamis is.

De milyen intuitív kép alapozza meg a függetlenséget? Vajon koherens-e ez a kép az individualizmussal? Vizsgáljuk meg ehhez, hogy az

17 Lásd ezzel kapcsolatban részletesebben Benedek írását jelen kötetben, valamint Benedek 2003, 165.

43Tanacs(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 438

igazolási eljárás formulában való szerepeltetésének mi az elvi indoka. Mi az a szerep, amit a vizsgált tudásfelfogásban elvileg neki szánhatunk? Nos: a jusztifikáció arra hivatott, hogy összekapcsolja a megismerő *p*-hitének igazságértékét a tőle függetlenül is fennálló, tényleges igazságok világával.

Mit is várnánk el egy ideális igazolási eljárással a kezünkben a megismerőtől? A megismerő számára a kérdéses *p* állítás igazságértékét az igazolási folyamat végének, azaz az eljárás végeredményének kellene szolgáltatnia, még akkor is, ha elfogadjuk, hogy ez az eljárástól függetlenül, már az igazolás kivitelezése előtt is adott és meghatározott volt. Ha például *S* az igazolás kivitelezése előtt *p*-t hamisnak hitte, vagy *p*-vel kapcsolatban semmilyen hittel nem bírt, akkor az igazolás végrehajtását követően a *p*-vel kapcsolatos hit igazságértékét az eljárás végeredményének megfelelően kellene megváltoztatnia, vagy *p*-hitét és a hit igazságértékét egyaránt az eredménnyel összhangban kellene kialakítania.

Az igazolást tehát a hitek igazságértékének létrehozójaként kell számításba vennünk. Ez a funkció nem választható le róla. Két erős ellenvetés tehető. Egyrészt, hogy számos esetben a vélekedés és igazságértéke már az igazolás elvégzése előtt is rendelkezésre áll, például a felfedezés folyamatának eredményeképpen. Az igazolási eljárás ilyenkor nem hozza létre sem a hitet, sem igazságértékét, hanem legfeljebb megerősíti az utóbbit, azaz megalapozza. Az érv azért olyan meggyőző, mert egyoldalú: olyan esetet állít elénk, amikor az igazolás végeredménye és a felfedezés során létrejött vélekedés igazságértéke megegyezik. Ha azonban az igazolási eljárás nem erősítené meg a más módon előidézett hit igazságértékét, mert éppen azzal ellentétes eredményre vezet, akkor a hit igazságértékét az igazolás végeredményéhez kellene hozzáigazítani.

Az igazságérték tekintetében tehát az igazolást generatív eljárásként kell felfognunk. Ebből a szempontból annak, hogy a *p*-re vonatkozó vélekedés már készen állt, kisebb a jelentősége, mint annak, hogy a vélekedés igazságértékét mi hozza létre. Ráadásul számos esetben, például az olyan bennünket érintő esetekben is, amikor egy új feladat megoldásáról van szó, az eljárás egyszerre generálja a *p*-re vonatkozó vélekedést és igazságértékét.

E sorrend elfogadása nem jelenti az objektivitás melletti elköteleződés feladását abban az értelemben, amely szerint az igazságot függetlennek tekintjük vélekedéseinktől. A közlekedés nem kétirányú: nem jelenti azt, hogy vélekedéseinket is függetlennek kell tekintenünk az igaz-

43Tanacs(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 439

ságtól. Ellenkezőleg! Az objektivitás melletti elköteleződés éppen azt jelenti, hogy hajlandóak vagyunk a tőlünk függetlennek tekintett igazsághoz igazítani vélekedéseinket. Ha pedig az igazolásra úgy tekintünk, mint amelynek kimondott célja az „igazságszolgáltatás", akkor ésszerű elvárnunk, hogy az eljárás elvégzése szolgáltassa a *p*-re vonatkozó vélekedést, de legalábbis igazságértékét.

Az a vád érhet, hogy amikor az igazságot az eljárás automatikusan kiadódó végeredményévé tettem, összekevertem az igazolás és az igazság fogalmát.[18] Mintha lemondtam volna az igazságról az igazolás javára. A helyzet azonban nem ez. Éppen az ellenvetés valóságmagjánál fogva ragaszkodom az igazság és az igazolási eljárás ilyen jellegű összekapcsolásához.

A másik érv arra az eddig félretett kérdésre irányítja figyelmünket, hogy mi a helyzet a tényleges, az olykor mégiscsak tévedést eredményező igazolási eljárásokkal? A gond az, hogy az igazságértékben történő tévedés éppen az igazolási eljárásba szövődő hiba következtében jön létre: ez az, amiért az igazolási eljárás önmagában nem garantálja az eljárás tévedhetetlenségét és a függetlennek tekintett igazság elérését. Az igazságot ezért nem kapcsolhatjuk össze a javasolt módon az igazolással.

Az ellenvetés ebben a formában nem azt állítja, hogy *nem* az igazolás dolga az igazságot célba venni és elkapni, hanem azt, hogy nem indulhatunk ki abból, hogy feladatát képes maradéktalanul ellátni. Mi azonban az igazolásokon keresztül szeretnénk hozzáférkőzni az igazságokhoz, és a kérdés az, hogyan tudunk különbséget tenni az igazolás végeredménye és „az" igazság között, vagy hogyan lehetünk képesek valódi azonosságukat felismerni, vagy látszólagos egybeesésüket megkülönböztetni.

Míg tehát az ellenvetés feltételezi, hogy az igazság elválik – mivel olykor különbözik – az eljárás végeredményétől, de nem mondja meg, hogy hogyan különböztessük meg őket, addig szerintem a dolgot fordítva kell látni. Számunkra az adódik igazságnak, amit az eljárás kiad, ily módon tehát a kettő egybeesik, ezért azt kell megnéznünk, mi teszi egyáltalán lehetővé, hogy különválasszuk őket.

18 Rorty, Richard (1998): Igazság valóságmegfelelés nélkül. In: Uő: *Megismerés helyett remény.* Pécs: Jelenkor Kiadó, 18. Az esetleges látszat ellenére nem követem őt abban, hogy semmi érdekeset nem mondhatunk az igazság és igazolás közötti kapcsolatról. Vö. i. m., 26.

43Tanacs(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 440

Az osztálytermi megismerő csakúgy, mint az alkotó matematikus, gyakorta tényleg csak az igazolási eljárás lépésein keresztül fér hozzá a végeredményt kimondó *p* állítás igazságértékéhez. Így például a térképszínezési négyszínproblémával kapcsolatos tételt azért tekintjük igaznak, mert a tétel Appel–Haken–Koch-féle számítógépes bizonyításának végrehajtása szerint a tétel bizonyított. A tétel igazsága egyszerűen az algoritmus, az ez alapján elkészített számítógépes program és a program futtatásának, azaz fizikai megvalósításának függvényében adott számunkra.[19] Mind a tényleges matematikai gyakorlat, mind az osztálytermi tudásprezentálás szempontjából kulcskérdés tehát, hogy mit mondhatunk a végeredmény megbízhatóságáról az eljárás lépéseinek függvényében. Ezért van az, hogy a tudományos és az osztálytermi megismerő tudással kapcsolatos dilemmája lényegében azonos.[20]

A mi kérdésünk a tényleges igazolási processzusokkal kapcsolatban is az, hogy megbízhatunk-e bennük, vagyis, hogy képesek-e elkapni az igazságot, és ha nem, akkor miért nem? A mi igazi problémánk ezért az, hogy az általunk kivitelezett eljárás végeredménye mennyiben fedi a tőlünk függetlennek felfogott igazságot akkor, ha az, amihez elsődlegesen hozzáférünk, maga az igazolás és végeredménye.

7. TUDÁS ÉS TÉVEDÉS

Objektív nem tudás – személyes nem tudás

Mielőtt megvizsgálnánk a személyes tudás és a személyes tévedés megkülönböztethetőségét, érdemes megvizsgálnunk a nem tudás más eseteit is.

19 Benacerraf amellett érvel, a matematikai igazságot a bizonyítottsággal azonosító matematikafilozófiai koncepciók (a „kombinatorikus nézetek"), egyéb hiányosságaik ellenére olyasvalamire tapintanak rá, amellyel a matematikai tudás, tágabban pedig a tudás adekvát filozófiai elméletének el kell számolnia (Benacerraf, Paul [1983]: Mathematical truth. In: Benacerraf, Paul–Putnam, Hilary [szerk.]: *Philosophy of Mathematics.* [2. kiadás.] Cambridge: Cambridge University Press, 403–420).

20 Sherry egyfelől azt állítja (397 és 399), hogy a matematika történetében nincsenek internális hibák, csak olyanok, amelyeket a filozófiai rekonstrukció hibaként mutat fel (Sherry, David [1997]: On Mathematical Error. In: *Studies in History and Philosophy of Science,* 28. [3]: 393–416). Az ezzel ellentétes történeti evidenciák ügyében lásd Tanács 2002, 341 és 369–377. Másfelől azzal az egyszerű körben forgó érveléssel operál (399–400), hogy

43Tanacs(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 441

Először is vegyük észre, hogy a tévedés csupán egyik, de nem egyetlen esete a nem tudásnak. Az I^2H tudáskoncepció szellemében az igazolás hiánya éppúgy nem tudásnak számít, ahogy a tévedés is. Egy konkrét episztemológiai helyzetben az első személyű nézőpontból is képes lehetek különbséget tenni tudás és nem tudás esetei között: igazolatlan vélekedéseimet biztosan nem tekinthetem tudásnak. Eszerint az igazolás hiányából fakadó nem tudás mind a külső, mind a megismerő belső perspektívájából megkülönböztethető. Az I^2H tudásdefiníció *ennyiben* tehát első személyben is diszkriminatív. Ha p-re vonatkozó vélekedésemet tudásnak szeretném tekinteni, akkor szert kell tennem p igazolására. Az I^2H személyes tudásként normatív és cselekvésvezérlő az igazolás tekintetében: megmondja, mit kell tennem ahhoz, hogy tudással rendelkezzem. Ráadásul az objektivitás külső nézőpontjából ugyanazon feltétel teljesülésének hiánya miatt számít a nem tudás esetének, mint az első személyű perspektívából nézve.

Összefoglalva: az I^2H tudáskoncepció individualista és objektivista felfogása nem eredendően összeegyeztethetetlen. Ez azt jelenti, hogy az objektív tudáskoncepció diszkriminatív, normatív és cselekvésvezérlő vonásai megőrződnek akkor, amikor az objektivitás absztrakt nézőpontjából átmegyünk az első személyű nézőpontba, azaz amikor az objektív tudás külső nézőpontját a személyes tudás belső nézőpontjává transzformáljuk.

Személyes tudás – személyes tévedés

Az előttünk álló kérdés tehát az, hogy az első személyű nézőpontból a tévedés mint a nem tudás másik esete is megkülönböztethető-e a tudás esetének fennállásától. Elsőként, összegezve az igazolás végeredményének eljárásfüggésével, valamint a személyes tudással kapcsolatos eddigi fejtegetéseket, fogalmazzuk meg a tudás és a tévedés közötti különbséget a megismerő egyes szám első személyű perspektívájából (egyelőre az áttekinthetőség kedvéért egyetlen eljárásra).

Akkor és csak akkor tudom, hogy p, ha:

(4) hiszem, hogy p,

mindig a matematikus téved, de a matematika tévedhetetlen. Ha tévedést találunk, akkor az a kognitíve esendő matematikust fogja jellemezni, míg minden tévedés- és hibamentes matematikai eredmény a matematika infallibilizmusát bizonyítja.

43Tanacs(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 442

(5) igazoltan hiszem (azaz ***J***-eljárásra alapozva hiszem), hogy p (***J***-igaz), és
(6) p valóban ***J***-igaz.

Ezzel szemben nyilvánvalóan tévedésben vagyok p-t illetően (azaz nem tudom, hogy p), ha
(7) hiszem, hogy p,
(8) igazoltan hiszem (azaz ***J***-eljárásra alapozva hiszem), hogy p (***J***-igaz),
(9) ám p valójában ***J***-hamis.

Az episztemológiai helyzet kulcsát az első személyű perspektívából nézve a harmadik feltétel jelenti – ezen áll vagy bukik, hogy saját igazolt hiteinkkel kapcsolatban tudásról vagy tévedésről beszélhetünk-e.

Mindeddig természetes, sőt kívánatos volt, hogy a megismerő individuum S változója ne jelenjék meg a harmadik feltételben. S hiánya egyszerre jelezte a feltétel megismerőtől való tényleges függetlenségét, valamint magában foglalta azt a feltételezést, hogy van egy olyan, S-étől különböző perspektíva, ahonnan a megismerés alanyát magába foglaló episztemológiai szituáció tárgyszerűen szemlélhető.

A szigorú individualizmus keretei között maradva, ugyanakkor az objektivitás követelményéhez is ragaszkodva a „p valóban igaz" vagy a „p valóban ***J***-igaz" értelmezéséhez felhasznált nézőpont csak a magányos megismerő szemszöge lehet.

Úgy tűnik azonban, nincs olyan nézőpont- és eljárásfüggetlen végeredmény, amelyet S ütköztethetne saját nézőpont- és eljárásfüggő végeredményével, és amelyet „diszkriminatív igazságnak" tekinthetne saját ***J***-igazságára vonatkoztatva. Ha hirtelenjében nem kívánjuk megengedni az igazságok világához való közvetlen, igazolás nélküli hozzáférést, akkor bármely más igazság, amely egyáltalán diszkriminatív lehet, nézőpont- és eljárásfüggő igazság. Ha pedig megengedünk az igazságok világához egy olyan közvetlen hozzáférést, amely annyira biztos és tévedhetetlen, hogy diszkriminatív az igazolási eljárás révén szolgáltatott végeredményre nézve, akkor mi végre az igazolás, és mi végre az igazság eljáráson keresztül történő megalapozásának követelménye?

Míg az igazolás tekintetében az I^2H tudáskoncepció diszkriminatívnak mutatkozott az első személyű perspektívában is, addig ez a képessége (egyetlen módszert szem előtt tartva) a tudás és a tévedés vonatko-

43Tanacs(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 443

zásában nem áll fenn. Ilyen körülmények között a tudás „igazolt igaz hit" koncepciójának szigorúan individuális értelmezése – saját absztrakciós keretein belül – nem teljesíti a tudáskoncepciókkal szemben korábban megkövetelt diszkriminativitást, azaz: a szigorú individualizmus és objektivizmus nem egyeztethető össze egyetlen képben.

8. MEGOLDÁSI KILÁTÁSOK: UTAK ÉS PERSPEKTÍVÁK

Elfogadva, hogy az igazolási eljárás végeredménye egyszerre függ a perspektívától és az eljárástól, valamint azt, hogy számos esetben az eljárás végeredményén kívül valóban nincs más módja az igazság azonosításának, a megoldást a gondolatmenet alapjául szolgáló megszorítások fellazítása vagy feladása jelentheti. Megvizsgálhatjuk az igazolási eljárás végeredményének a perspektívától *és* az eljárástól való kettős függés megszüntetésének lehetőségeit.

Kerülőutak – a módszertani pluralizmus

A szigorú individualizmus keretei között maradva ragaszkodnunk kell hozzá, hogy egyetlen nézőpontot feltételezhetünk, de megengedhetjük alternatív eljárások alkalmazását. Láttuk, hogy *S p*-hitének igazságértéke ***J***-től függ, és éppen ez okozza a bajt a hibás igazolási eljárás esetén: az eljárásba szövődő hiba vonja maga után a tévedést. *S* igaznak hiszi *p*-t, amikor valójában hamisnak kellene hinnie. A *p*-hit igazságának független ellenőrzésére egy alternatív, ***J*** szempontjából redundáns ***J′*** eljárás teremt lehetőséget. Így ***J*** végeredményét mint igazságot ***J′***-n keresztül ellenőrizzük, és értelemszerűen *vice versa.* Kritériumot ugyan ez sem szolgáltat a tudás és a tévedés megkülönböztetésére, azaz nem garantálja, hogy amikor *p* valójában ***J***-hamis, akkor a redundáns ***J′***-eljárás a *p* ***J′***-hamis eredményre fog vezetni. Természetesen azért nem, mert a ***J′*** esetében sem zárható ki az eljárásba szövődő hiba lehetősége.

Akkor mit nyertünk egyáltalán? Bár nem kaptunk garanciát a tudás és a tévedés személyes megkülönböztethetőségére, mondhatunk azonban valamit a lehetőségekről. Ahhoz, hogy a megismerőnek legyen esélye rájönni tévedésére, eredményét kerülőúton célszerű ellenőriznie. Ezt nevezhetjük az alternatív igazolási eljárások révén történő ellenőrzés módszerének.

43Tanacs(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 444

Korábban láttuk, hogy az objektivitás „a megismerő hiteitől független kritériumokat" jelent, és e kritériumok határozzák meg, hogy *S* tudja, hogy *p*, vagy csak tévesen hiszi azt, hogy *p*.[21] Az individuális megismerő annyiban lehet objektív, annyiban viszont igenis lehet, amennyiben a ***J***-igaz *p*-hit ***J***-től független ***J'***-eljárás révén ellenőrzésével megteremti a lehetőségét a tévedés kiderítésének. Az objektivitás *p*-hittől független kritériumának követelménye a hit igazságértékét megalapozó eljárástól független eljárás kívánalmában ölt testet.

Az osztálytermi tudásellenőrzés alanyának a következőt tanácsolhatjuk. Amikor a feladatmegoldás nem zárt, azaz például nem olyan, hogy a végeredményül kapott szám visszahelyettesíthető a kiinduló egyenletbe, akkor ajánlott, hogy az ellenőrzés során a kész feladat megoldási lépéseitől minél messzebbre távolodjék el. Ebből a szempontból a tanuló akkor van legközelebb az eredeti lépésekhez, ha egyszerű ellenőrző áttekintést végez, és szemét csupán „átfuttatja" a kész lépéseken. Az osztálytermi körülmények közepette, a tanuló képességeit vagy a rendelkezésére álló időt figyelembe véve, gyakorta nincs mód igazi független, alternatív eljárás előállítására. Ekkor az ismert lépések keverésének, egy-egy részlépés alkalmas megváltoztatásának, vagy egy lépéssorozat elemei felcserélésének módszere ajánlható. Abban az esetben, ha erre sincs mód (mert a lépéseket alkotó műveletek vagy a feladat szerkezete miatt nem teljesül a kommutativitás), akkor az elvi lépések emlékezetből történő felelevenítésére támaszkodva a feladat ismételt, írásban történő kváziúj megismétlését, azaz a független feladatmegoldást célszerű megkísérelni.[22]

„Kerülő perspektívák" – interszubjektivizmus

A másik lehetőség a módszertani pluralizmus helyett (vagy mellett) a szigorú individualizmus feladása. Eszerint az ellenőrzés során támaszkodhatunk más megismerőkre is. Amíg egy adott eljárás szisztematiku-

21 Margitay 2002, 19.

22 Ez természetesen felveti a módszer individuálásának kérdését, azaz, hogy mit tekintünk ugyanazon eljárásnak, és milyen konkrét különbségek esetén beszélhetünk „valóban más igazolási eljárásról"? Jelen esetben ez úgy vetődik fel, hogy az azonosíthatóan egyező részműveletekből álló, de eltérő sorrendben végrehajtott lépésekből álló eljárásokat azonosaknak vagy különbözőknek kell-e tekintenünk? Ez a részműveletek kompozicionalitásának problémája, de tárgyalására jelen körülmények között nincs lehetőség.

43Tanacs(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 445

san függ a megismerő perspektívájától, és így az eljárás végeredménye szisztematikusan függ e kettőtől, addig egy másik megismerő individuum perspektívájától (és a hozzákötött eljárástól egyaránt) független. A másik szubjektum által kivitelezett eljárás valóban független ellenőrzést biztosít, és a függetlenül kapott végeredmény összevetését teszi lehetővé a megismerő saját perspektívafüggő végeredményével. Ily módon az interszubjektív ellenőrzés követelményéhez lyukadtunk ki.

Az interszubjektív ellenőrzésre is igaz, hogy a tudás és a tévedés megkülönböztetésének garanciáját nem, csupán lehetőségét biztosítja. Az egyik megismerő nézőpontjából megkülönböztethetetlen tudás- és tévedésesetek más megismerők perspektívájának bevonásával megkülönböztethetőkké válhatnak. A diszkriminativitás *lehetőségét* az eltérő nézőpontokhoz kötött eljárások végeredményének különbségei szolgáltatják. Amikor a különálló, elszigetelt megismerők univerzumain (perspektíváin) belül lehetetlen rájönni a tévedésre azoknak, akik objektíve tévednek, akkor az eredmények különbözősége folytán az előbbi megismerőkből alkotott közösség számára már lehetségessé válik.

Érdemes észrevenni, hogy a diszkriminativitás egyáltalában vett *lehetőségét* az episztemológiailag felcserélhetetlennek tekintett (de a kognitív hierarchia azonos szintjén álló) szubjektumok biztosítják.[23] Amikor egy megismerő eredménye a másikéra vonatkoztatva diszkriminatív (egyiké objektíve helyes, míg a másiké nem), akkor egyik nézőpontot nem helyettesíthetjük a másikba, hiszen a megismerő a transzformáció során magával vinné a nézőpontfüggő eljárást és végeredményt, és ezzel megszünteti a diszkriminitivitás lehetőségét.

Amennyiben tehát szükségünk van a tudás és a tévedés interszubjektív megkülönböztethetőségének lehetőségére, annyiban az interszubjektivitást a szubjektumok episztemológiai felcserélhetetlenségeként kell értelmeznünk. Ennek fényében az interszubjektív diszkriminativi-

23 Az episztemológiai individualizmus és az individuumok felcserélhetőségével kapcsolatban lásd Fehér Márta [1986]: A tudásszociológia mint tudományelmélet. In: *Janus,* I. 3., ősz: 50), valamint Tanács 2002, 354–359. Uniformitás és objektivitás vonatkozásában lásd Rescher 1997, 11–12 és 14). Rescher szerint a szubjektivitás/objektivitás megkülönböztetés az által*am,* illetve az által*unk* elfogadott vélekedések szembeállításán fordul meg (Rescher 1997, 13). Számára a „mi", a többes szám első személy már az objektivitást jelenti, és látható, hogy ez hallgatólagosan az interszubjektivitást jelenti. Érvelésem szerint azonban a „mi"-t nem rakhatjuk össze felcserélhető (uniform) szubjektumokból, mert akkor nem lesz különbség az által*am* és az által*unk* elfogadott vélekedések között.

43Tanacs(3).qxd 2005.06.09. 10:43 Page 446

tás redukálhatatlan az individuális diszkriminativitásra, és az interszubjektív ellenőrizhetőség redukálhatatlan az individuális ellenőrizhetőségre, sőt redukálhatatlan az episztemológiailag felcserélhető szubjektumok közötti ellenőrizhetőségre is.

Ez megmagyarázza, hogy miért kell komolyan vennünk, és a matematikai gyakorlattól elidegeníthetetlennek tekintenünk az eredmények interszubjektív ellenőrzésének követelményét. Ha pedig elfogadjuk, hogy a matematikai eredményeket az egyéni jótállásra visszavezethetetlen módon szavatolja a közösség, akkor leképezése a tanítás során is indokoltnak tűnik. Az individuális komponensek mellett tehát szükséges a nem individuális összetevőket is megjeleníteni a tanítási folyamatban, és szükséges a megismerő individuumot felkészíteni a tudásellenőrzés (és -előállítás) közösségi szituációira. Mindez az individuumok közötti matematikai (tudományos) kommunikációhoz szükséges képességek, illetve készségek kialakításának és fejlesztésének sokkal hangsúlyosabbá tételét követeli meg.